2 Метод стрельбы

Метод стрельбы (иногда также называемый баллистическим методом или методом начальных параметров) не решает краевую задачу для уравнения Эйлера в исходной постановке, а сводит ее к последовательности более простых задач, а именно — задач Коши с особым образом сформулированными начальными условиями.

Как и ранее, мы рассмотрим вначале случай линейного уравнения Эйлера, поскольку для него метод стрельбы принимает особо простой вид. Позже перейдем к более общему случаю. Одна сперва сформулируем условие существования и единственности решения краевой задачи.

Теорема. *Рассмотрим краевую задачу*

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta.$$

Если выполнены следующие условия:

1) *функции* $f, f_y, f_{y'}$ *непрерывны в области* $D = \{(x, y, y') | x \in [a, b], y \in \mathbb{R}, y' \in \mathbb{R}\}$*;*

2) $f_{y'} \geq \delta > 0$ *на* D*;*

3) $\exists M : M = \max\limits_{D} |f_{y'}(x, y, y')|$*;*

то краевая задача имеет единственное решение.

Заметим, что в данных указаниях мы не рассматриваем в деталях численные методы решения задачи Коши. Предполагается, что этот материал уже известен из курса численных методов, однако для справки в Приложении B приводится описание метода Эйлера 1-го порядка точности.

2.1 Метод стрельбы в случае линейного уравнения Эйлера

Пусть применение необходимого условия экстремума приводит к линейной краевой задаче, которую мы запишем в виде

$$\begin{cases} y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x), \quad x \in [a, b], \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \end{cases}$$

Если предположить, что $p(x), q(x), r(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и, кроме того, $q(x) > 0$, то эта задача имеет единственное решение в силу сформулированной выше теоремы.

Рассмотрим теперь две задачи Коши (т.е. задачи с начальными условиями):

$$\begin{cases} y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x), \quad x \in [a, b], \\ y(a) = \alpha, \quad y'(a) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

и

$$\begin{cases} y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x), \quad x \in [a, b], \\ y(a) = 0, \quad y'(a) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

В силу наложенных ограничений на правую часть уравнений, обе задачи имеют единственное решение. Обозначим через $y_1(x)$ решение задачи (1), а через $y_2(x)$ — задачи (2). Предполагая, что $y_2(b) \neq 0$, определим функцию

$$y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x).$$

Заметим, что $y_2(b) = 0$ противоречит условиям, сформулированным выше.

Легко показать, что $y(x)$ является решением исходной краевой задачи. Действительно, найдем производные функции $y(x)$:

$$y'(x) = y_1'(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2'(x),$$
$$y''(x) = y_1''(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2''(x)$$

и подставим эти выражения в уравнение Эйлера:

$$\begin{aligned} y''(x) &= [p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) + r(x)] + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} [p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)] = \\ &= p(x)\left[y_1'(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2'(x)\right] + q(x)\left[y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x)\right] + r(x) = \\ &= p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x). \end{aligned}$$

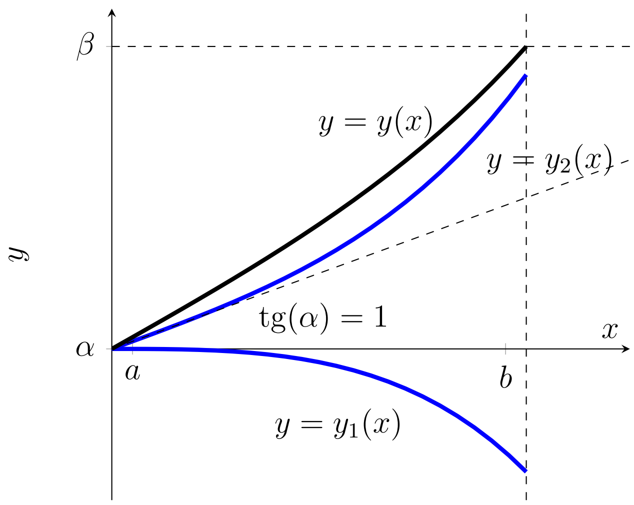
Кроме того,

$$y(a) = y_1(a) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(a) = \alpha + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} \cdot 0 = \alpha,$$

и

$$y(b) = y_1(b) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(b) = \beta.$$

Таким образом, решение краевой задачи (а значит, и вариационной задачи) свелось к решению двух задач Коши. Дадим небольшую графическую иллюстрацию метода:



Заметим, что точность метода в линейном случае определяется точностью решение задач Коши.

Ниже приведен пример, который можно использовать при отладке.

Пример. *Решим краевую задачу для уравнения Эйлера*

$$\begin{cases} y'' = 4(y - x), \quad x \in [0, 1] \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 2 \end{cases}$$

Решение.
Заметим, что в этом уравнении $p(x) = 0$, $q(x) = 4 > 0$, $r(x) = -4x$. Таким образом, условия теоремы выполняются и задача имеет решение и притом единственное.

Рассмотрим, согласно изложенной схеме метода, две задачи Коши:

$$\begin{cases} y_1'' = 4y_1 - 4x, \quad x \in [0,1], \\ y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 0, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} y_2''(x) = 4y_2, \quad x \in [0,1], \\ y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1. \end{cases}$$

Нетрудно найти решение этих задач:

$$y_1(x) = -\frac{1}{4}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right) + x, \qquad y_2(x) = \frac{1}{4}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right).$$

Осталось составить решение краевой задачи:

$$y(x) = y_1(x) + \frac{2 - y_1(1)}{y_2(1)} y_2(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^2 - e^{-2}} + x.$$

2.2 Метод стрельбы для уравнения Эйлера общего вида

Попробуем применить изложенную идею к краевой задаче более общего вида:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a,b], \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \end{cases}$$

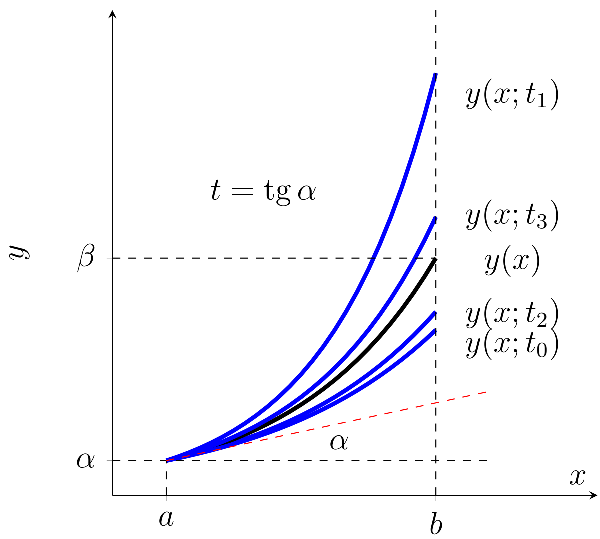
Задавшись некоторым произвольным значением t_0, рассмотрим задачу Коши вида

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a,b], \\ y(a) = \alpha, \quad y'(a) = t_0. \end{cases}$$

Пусть $y(x; t_0)$ — ее решение. Очевидно, что, вообще говоря, $y(b; t_0) \neq \beta$. На рисунке ниже приведена геометрическая интерпретация того, что произошло: выбрав угол наклона «пушки» равным t_0, мы попали не в цель — точку (b, β), — а в точку $(b, y(b; t_0))$. Фактически, метод стрельбы сводит краевую задачу (а значит, и вариационную задачу тоже) к решению трансцендентного уравнения

$$y(x; t) = \beta$$

относительно параметра t, имеющего смысл угла наклона касательной к графику решения в начальной точке.



Вообще говоря, для решения этого уравнения пригоден любой удобный метод. Мы рассмотрим подробно применение метода Ньютона. Напомним, что в этом методе строится последовательность

$$x^{k+1} = x^k - J^{-1}\left(x^k\right) f\left(x^k\right),$$

которая при определенных условиях сходится к решению уравнения (системы уравнений) $f(x) = 0$. Здесь $J(x) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ — якобиан системы уравнений. В нашем случае формула итераций принимает, очевидно, следующий вид

$$t_{k+1} = t_k - \frac{y(b; t_k) - \beta}{\dfrac{d}{dt} y(b; t_k)}.$$

Основную проблему составляет вычисление производной $\dfrac{d}{dt} y(b; t)$. Оказывается, что для этого достаточно решить одну задачу Коши. Действительно, рассмотрим подробнее задачу

$$\begin{cases} y''(x; t) = f(x, y(x; t), y'(x; t)), \quad x \in [a, b] \\ y(a; t) = \alpha, \quad y'(a; t) = t \end{cases} \qquad (*)$$

Продифференцируем уравнение по t (аргументы y в правой части опускаем для простоты):

$$\frac{\partial}{\partial t} y''(x; t) = \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial t}.$$

Так как t никак не связано с x, то первое слагаемое обращается в нуль. Дифференцирование же начальных условий дает

$$\frac{\partial y(a; t)}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial y'(a; t)}{\partial t} = 1.$$

Чтобы упростить обозначения, введем функцию $z(x; t) = \dfrac{\partial y(x; t)}{\partial t}$. Предположим, что порядок дифференцирования по t и x можно поменять местами. Получаем задачу Коши

$$\begin{cases} z''(x; t) = \dfrac{\partial f(x, y, y')}{\partial y} \cdot z(x; t) + \dfrac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} \cdot z'(x; t), \quad x \in [a, b] \\ z(a; t) = 0, \quad z'(a; t) = 1, \end{cases} \qquad (**)$$

в которой параметр t уже не фигурирует явно.

Итак, последовательность приближений t_k в методе Ньютона строится по формуле:

$$t_{k+1} = t_k - \frac{y(b; t_k) - \beta}{z(x; t_k)},$$

где $z(x; t_k)$ — решение задачи Коши (**), а $y(x; t_k)$ — задачи (*) при $t = t_k$. Таким образом, на каждой итерации необходимо решить две задачи Коши.